

FIRMA DELLO STUDENTE

--

**SECONDA PROVA INTERMEDIA DI STATISTICA  
CLEA - CLEFIN - CLELI (COD. 5047/4038)**

**15 gennaio 2002**

Cognome

Nome

Numero di matricola

**COMPITO A1**

**Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi. Al termine della prova, è OBBLIGATORIO consegnare il presente foglio ed il foglio di brutta (DI CUI NON SI TERRÀ CONTO AI FINI DELLA VALUTAZIONE).**

**APPROSSIMARE TUTTI I CALCOLI ALLA QUARTA CIFRA DECIMALE**

1. (2 punti) Sia  $X$  una popolazione distribuita secondo la legge Uniforme sull'intervallo  $(\theta-2, \theta+2)$ ; sia  $X_1, \dots, X_4$  un campione bernoulliano estratto da  $X$ . Dimostrare (esplicitando il procedimento seguito) che il seguente stimatore:

$$T(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{2X_1 - X_2}{2} + \frac{2X_3 + X_4}{3}$$

è distorto per  $\theta$  e valutare la distorsione di  $T$ .

--

2. (2 punti) Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione bernoulliano estratto da una popolazione con funzione di densità caratterizzata da un parametro  $\theta$  non noto. Siano inoltre  $H_0: \theta = \theta_0$  e  $H_1: \theta = \theta_1$  due ipotesi *semplici*, e sia  $R = \{(x_1, \dots, x_n), \sum_{i=1}^n x_i^2 > 10\}$  la regione critica di un test  $T^*$  per verificare  $H_0$  contro  $H_1$ . Scrivere l'espressione analitica di  $\alpha$  (probabilità di commettere errore di primo tipo) e  $\beta$  (probabilità di commettere errore di secondo tipo) in relazione al test  $T^*$ .

$\alpha$
$\beta$

3. (4 punti) Il direttore della scuola elementare XYZ presume che i suoi studenti abbiano un quoziente intellettivo (QI) superiore alla media degli studenti di scuola elementare (pari a 120), così da poter considerare la sua scuola una "Scuola di Eccellenza". Possiamo supporre che la variabile aleatoria "quoziente intellettivo" (QI) si distribuisca (nella scuola) come una normale di valore atteso non noto  $\mu$  e varianza 225. Il direttore decide allora di verificare l'ipotesi  $H_0: \mu=120$  contro  $H_1: \mu>120$ : misura quindi il quoziente di intelligenza di 49 bambini scelti casualmente tra gli studenti e riscontra un valore medio di 124. Scrivere l'espressione analitica del p-value corrispondente alla realizzazione campionaria osservata e calcolarne il valore. Decidere inoltre se il direttore può considerare la sua scuola una "Scuola di Eccellenza", avendo fissato il livello di significatività  $\alpha=0.04$  (motivare la risposta).

p-value
Decisione

**Modalità A1**

**4. (3 punti)** Sia  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un campione casuale semplice (bernoulliano) estratto da una popolazione  $X$  distribuita secondo una legge di distribuzione non nota, tale che  $E(X)=\mu$  (incognito) e  $\text{Var}(X)=\sigma^2$  (noto). Enunciare le proprietà di cui gode la media campionaria,  $\bar{X}$ , come stimatore di  $\mu$ . Specificare inoltre la sua distribuzione asintotica.

**5. (4 punti)** Si consideri la popolazione  $X$ , con funzione di probabilità

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.4 & x = -4, x = 4 \\ 0.2 & x = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Estratto da  $X$  il campione bernoulliano  $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ , e definita la media campionaria

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}$ , si calcoli il valore atteso di  $\bar{X}$ , la varianza di  $\bar{X}$  e la probabilità approssimata con cui  $\bar{X}$  assume valori maggiori di 0.4.

$E(\bar{X})$	$\text{Var}(\bar{X})$
$P(\bar{X} > 0.4)$	

**6.(2 punti)** Un'urna contiene 40 palline rosse e 60 blu. Vengono estratte con reimmissione due palline. Definiti i due numeri aleatori:

$$X = \{ \text{numero di palline rosse estratte} \}$$

$$Y = \{ \text{numero di palline blu estratte} \}$$

si determini la distribuzione del vettore aleatorio  $(X, Y)$ .

**7 (13 punti)** Per poter decidere se è necessario un intervento a livello nazionale di propaganda contro il furto, si selezionano a caso 300 persone e si chiede se hanno mai commesso un furto nella loro vita. Se la proporzione di "chi ha commesso almeno un furto" risultasse superiore a 0.55 allora si riterrebbe necessario un intervento. Tra i 300 soggetti intervistati in totale riservatezza, 180 hanno ammesso di aver rubato almeno una volta nella loro vita.

a) Si fornisca uno stimatore non distorto e una stima della proporzione effettiva  $p$  di coloro che hanno commesso un furto almeno una volta nella loro vita. Si calcoli inoltre la varianza dello stimatore utilizzato (**1+1 + 2 punti**).

Stimatore	Stima

Varianza

b) Si vuole determinare l'intervallo di confidenza per  $p$  al livello  $(1-\alpha) = 0.99$ . Indicare

l'espressione analitica  
(formula generale in simboli)  
dell'opportuno intervallo di confidenza  
(**1 punto**)

il valore del percentile ottenuto sulle tavole  
a tale scopo  
(**1 punto**)

l'intervallo numerico ottenuto  
(usare quattro cifre decimali).  
(**1 punto**)

c) Si decide allora di verificare l'ipotesi nulla  $H_0: p \leq 0.55$  contro  $H_1: p > 0.55$  al livello  $\alpha = 0.05$ .  
Si indichi:

l'espressione analitica  
(formula generale in simboli)  
dell'opportuna regione critica  
(**2 punti**)

il valore del percentile letto sulle tavole  
(**2 punti**)

la decisione presa  
(**2 punti**)

