PROVA SCRITTA DI STATISTICA (cod. 4038, 5047, 371, 377)

8 settembre 2005

MODALITÀ A

APPROSSIMARE TUTTI I CALCOLI ALLA QUARTA CIFRA DECIMALE

Esercizio 1. (7 punti)

Su un collettivo di 15 nuclei familiari sono stati rilevati i seguenti caratteri

X : Numero di bambini

Y : Stato civile del capofamiglia (C=CONIUGATO, CE=CELIBE/NUBILE, D=DIVORZIATO)

I dati sono contenuti nella seguente tabella

Nucleo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	1	3	4	2	1	4	0	1	5	3	2	2	0	3	2
Y	C	C	C	C	CE	C	D	CE	C	C	C	C	D	C	CE

a) Si costruisca la distribuzione di frequenze assolute del carattere X.

b) Si fornisca un'opportuna rappresentazione grafica della distribuzione del carattere X.

c) Si determinino la mediana e la media di X. Si utilizzino i valori trovati per trarre informazioni sulla forma della distribuzione del carattere in esame.

d) Indicato con $Me(X)$ il valore della mediana di X, si completi con i valori numerici delle frequenze assolute congiunte la seguente tabella a doppia entrata riportandola sul foglio protocollo.

X \ Y	C	CE	D	
$0 \leq x \leq Me(X)$	·	·	·	·
$x > Me(X)$	·	·	·	·
	·	·	·	15

e) Si consideri la tabella a doppia entrata ottenuta al punto d). Lasciando fissa una delle due distribuzioni marginali, si costruisca una tabella di massima connessione unilaterale di X con Y.

Esercizio 2. (4 punti)

Lo stipendio lordo base annuo dei dipendenti di un certo livello professionale è una variabile casuale X con valore atteso pari a 20.000 Euro e varianza pari a 500 Euro^2.

a) Tutti i dipendenti devono pagare una quota fissa di 100 Euro per un fondo previdenziale e a quello che rimane viene tolto il 20% per le tasse. Sia Y la v.c. "stipendio al netto del fondo previdenziale e delle tasse". Risulta $Y = \frac{4}{5}X - 80$. Si determinino il valore atteso e la varianza di Y.

b) Fornire una limitazione inferiore per la probabilità di osservare un valore di Y compreso tra 15.820 e 16.020 Euro.

Esercizio 3. (2 punti)

Siano A e B due eventi definiti su uno spazio Ω.

a) È noto che $\mathbb{P}(A) = 0,2$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,1$. Si determini la probabilità $\mathbb{P}(B)$ nel caso in cui A e B siano eventi indipendenti.

b) Dimostrare che se A e B sono due eventi indipendenti allora anche A e $\overline{B}$ sono indipendenti.

Esercizio 4. (3 punti)

Siano X ed Y due variabili casuali discrete con la seguente distribuzione congiunta di probabilità

X \ Y	0	1	2
0	0,2	0,16	0,04
1	0,3	0,24	0,06

a) Stabilire se X ed Y sono probabilisticamente indipendenti.

b) Determinare la distribuzione di probabilità della variabile casuale prodotto $Z = X \times Y$.

c) Calcolare il valore atteso di Z.

Esercizio 5. (4 punti)

Sia X una variabile casuale con valore atteso $\mu > 0$ non noto e varianza σ^2 nota. Si vuole stimare il parametro μ sulla base di un campione bernoulliano $(X_1, \ldots, X_n)$ di numerosità $n = 4$. Vengono proposti i due stimatori

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \qquad T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4}{4}.$$

a) Si stabilisca se ciascuno dei due stimatori T_1 e T_2 è non distorto per μ.

b) Si stabilisca quale tra T_1 e T_2 è preferibile utilizzare adottando il criterio dell'errore quadratico medio.

Esercizio 6. (7 punti)

Sull'etichetta di un fustino di detersivo si dichiara che il peso in Kg del contenuto è pari a μ_0. Si ipotizza che il peso effettivo X del prodotto si distribuisca secondo una v.c. gaussiana, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 noto. L'intervallo di confidenza per μ di livello $1-\alpha = 0,975$ basato sull'osservazione del contenuto di un campione bernoulliano $(x_1, \ldots, x_n)$ di $n = 50$ fustini è $ic_{0,975}(\mu) = (4,6416, \ 4,9584)$.

a) Si determinino i valori di $\overline{x}_{50}$ e σ.

b) Un'associazione di consumatori ritiene che il contenuto medio effettivo dei fustini sia inferiore al peso dichiarato μ_0. Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione bernoulliano di numerosità n tratto da X. Si scriva l'espressione generale della regione critica di ampiezza α per il problema di verifica d'ipotesi $H_0 : \mu < \mu_0$ *vs* $H_1 : \mu \geq \mu_0$.

c) Sulla base della realizzazione campionaria osservata con $n = 50$ di cui sopra, si dica se si accetta o si rifiuta H_0 per $\mu_0 = 5$ ed $\alpha = 0,025$. (Nel caso non si fosse risolto il punto a), si utilizzino i valori $\overline{x}_{50} = 4,9$ e $\sigma = 0,4$).

d) Si calcoli la probabilità di commettere un errore di seconda specie per $\mu_1 = 5,2$. (Nel caso non si fosse risolto il punto a), si utilizzi il valore $\sigma = 0,4$).