PROVA SCRITTA DI STATISTICA (cod. 4038, 5047, 371, 377)

8 settembre 2005

MODALITÀ B

APPROSSIMARE TUTTI I CALCOLI ALLA QUARTA CIFRA DECIMALE

Esercizio 1. (7 punti)

Su un collettivo di 13 nuclei familiari sono stati rilevati i seguenti caratteri

X : Stato civile del capofamiglia (C=CONIUGATO, CE=CELIBE/NUBILE, D=DIVORZIATO)
Y : Numero di bambini

I dati sono contenuti nella seguente tabella

Nucleo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Y	3	3	4	2	1	4	1	0	5	3	2	3	0
X	C	C	C	C	CE	C	D	CE	C	C	C	C	D

a) Si costruisca la distribuzione di frequenze assolute del carattere Y.

b) Si fornisca un'opportuna rappresentazione grafica della distribuzione del carattere Y.

c) Si determinino la mediana e la media di Y. Si utilizzino i valori trovati per trarre informazioni sulla forma della distribuzione del carattere in esame.

d) Indicato con $Me(Y)$ il valore della mediana di Y, si completi con i valori numerici delle frequenze assolute congiunte la seguente tabella a doppia entrata riportandola sul foglio protocollo.

X \ Y	$0 \leq y \leq Me(Y)$	$y > Me(Y)$	
C	.	.	.
CE	.	.	.
D	.	.	.
	.	.	13

e) Si consideri la tabella a doppia entrata ottenuta al punto d). Lasciando fissa una delle due distribuzioni marginali, si costruisca una tabella di massima connessione unilaterale di Y con X.

Esercizio 2. (4 punti)

Lo stipendio lordo base annuo dei dipendenti di un certo livello professionale è una variabile casuale X con valore atteso pari a 40.000 Euro e varianza pari a 1.000 Euro^2.

a) Tutti i dipendenti devono pagare una quota fissa di 200 Euro per un fondo previdenziale e a quello che rimane viene tolto il 20% per le tasse. Sia Y la v.c. "stipendio al netto del fondo previdenziale e delle tasse". Risulta $Y = \frac{4}{5}X - 160$. Si determinino il valore atteso e la varianza di Y.

b) Fornire una limitazione superiore per la probabilità di osservare un valore di Y inferiore a 31.640 Euro o superiore a 32.040 Euro.

Esercizio 3. (2 punti)

Siano A e B due eventi definiti su uno spazio Ω.

a) Sapendo che $\mathbb{P}(B|A) = 0,3$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,21$, si determini la probabilità $\mathbb{P}(A)$.

b) Dimostrare che se A e B sono due eventi indipendenti allora anche $\overline{A}$ e B sono indipendenti.

Esercizio 4. (3 punti)

Siano X ed Y due variabili casuali discrete con la seguente distribuzione congiunta di probabilità

X \ Y	0	2
1	0,3	0,1
2	0,2	0,4

a) Stabilire se X ed Y sono probabilisticamente indipendenti.

b) Determinare la distribuzione di probabilità della variabile casuale quoziente $Z = Y \div X$.

c) Calcolare il valore atteso di Z.

Esercizio 5. (4 punti)

Sia X una variabile casuale con valore atteso $\mu > 0$ non noto e varianza σ^2 nota. Si vuole stimare il parametro μ sulla base di un campione bernoulliano $(X_1, \ldots, X_n)$ di numerosità $n = 5$. Vengono proposti i due stimatori

$$T_1 = \frac{2X_1 + 3X_3 + 2X_5}{5}, \qquad T_2 = \frac{X_1 + X_3 + X_5}{3}.$$

a) Si stabilisca se ciascuno dei due stimatori T_1 e T_2 è non distorto per μ.

b) Si stabilisca quale tra T_1 e T_2 è preferibile utilizzare adottando il criterio dell'errore quadratico medio.

Esercizio 6. (7 punti)

Si ipotizza che il salario X di una categoria di metalmeccanici si distribuisca secondo una v.c. gaussiana, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 noto. L'intervallo di confidenza per μ di livello $1 - \alpha = 0,95$ basato sull'osservazione di un campione bernoulliano $(x_1, \ldots, x_n)$ di $n = 9$ dipendenti è $ic_{0,95}(\mu) = (1.478,24,\ \ 1.501,76)$.

a) Si determinino i valori di $\overline{x}_9$ e σ.

b) Sulla base di un campione bernoulliano $(X_1, \ldots, X_n)$ di numerosità n tratto da X si vuole sottoporre a verifica l'ipotesi che il salario medio sia superiore ad un certo valore μ_0. Si scriva l'espressione generale della regione critica di ampiezza α per il problema di verifica d'ipotesi $H_0 : \mu > \mu_0$ *vs* $H_1 : \mu \leq \mu_0$.

c) Sulla base della realizzazione campionaria osservata con $n = 9$ di cui sopra, si dica se si accetta o si rifiuta H_0 per $\mu_0 = 1.500$ ed $\alpha = 0,05$. (Nel caso non si fosse risolto il punto a), si utilizzino i valori $\overline{x}_9 = 1.495$ e $\sigma = 15$).

d) Si calcoli la probabilità di commettere un errore di seconda specie per $\mu_1 = 1.498$. (Nel caso non si fosse risolto il punto a), si utilizzi il valore $\sigma = 15$).