

Esercizi di Probabilità

ANNALISA CERQUETTI - SANDRA FORTINI ¹

[Vai all'indice](#)

¹Istituto di Metodi Quantitativi, Viale Isonzo, 25, 20133 Milano, Italy. E-mail:
annalisa.cerquetti@unibocconi.it, sandra.fortini@unibocconi.it

Questa raccolta contiene alcuni esercizi sugli argomenti generalmente trattati in un corso introduttivo di calcolo delle probabilità. L'intento è quello di fornire uno strumento utile a migliorare o verificare la comprensione delle definizioni e dei risultati più importanti, mediante esempi schematici, riferiti per lo più ad esperimenti connessi a giochi di sorte. Gli esercizi che si riferiscono ad argomenti che esulano, generalmente, dai programmi dei corsi introduttivi, sono contrassegnati con un asterisco.

Indice

1	Esercizi	3
1.1	Eventi	3
1.2	Probabilità	3
1.3	Probabilità condizionale ed indipendenza	4
1.4	Variabili aleatorie	5
1.5	Vettori aleatori	6
1.6	Distribuzioni condizionali ed indipendenza.	6
1.7	Valore atteso	7
1.8	Momenti	8
1.9	Distribuzione Normale	9
1.10	Covarianza	9
1.11	Distribuzione Normale multivariata*	10
2	Soluzioni	11
2.1	Eventi	11
2.2	Probabilità	12
2.3	Probabilità condizionale ed indipendenza	12
2.4	Variabili aleatorie	13
2.5	Vettori aleatori	15
2.6	Distribuzioni condizionali ed indipendenza	16
2.7	Valore atteso	18
2.8	Momenti	19
2.9	Distribuzione Normale	21
2.10	Covarianza	22
2.11	Distribuzione Normale multivariata*	23

Capitolo 1

Esercizi

1.1 Eventi

1. Definire lo spazio degli eventi elementari relativo all'esperimento che consiste nel lanciare una moneta finchè non compare *testa*. Descrivere l'evento "sono necessari meno di tre lanci".

Soluzione

2. Costruire lo spazio degli eventi elementari relativo all'esperimento che consiste nel lanciare una moneta tre volte. Descrivere l'evento "*testa* al terzo lancio".

Soluzione

3. Un gioco consiste nel lanciare una moneta tre volte. Ad ogni lancio si vince un euro se il risultato è *testa*. Sia X_t la vincita al tempo t .

a) Descrivere le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3 come funzioni di Ω .

b) Descrivere l'evento $(X_1 = X_2)$.

Soluzione

4. Descrivere l'evento "nessuno degli eventi A, B o C si verifica".

Soluzione

5. Descrivere l'evento: "si verifica esattamente uno degli eventi A, B o C ".

Soluzione

1.2 Probabilità

1. Un dado viene lanciato due volte. Calcolare la probabilità di ottenere lo stesso risultato nei due lanci.

Soluzione

2. Si lancia una moneta fino a quando non compare *testa*. Calcolare la probabilità che siano necessari n tentativi.

Soluzione

3. Si lancia un dado cinque volte. Calcolare la probabilità di osservare esattamente un "sei".

Soluzione

4. Si lancia una moneta tre volte. Calcolare la probabilità di osservare almeno una testa.

Soluzione

1.3 Probabilità condizionale ed indipendenza

1. Si lancia una moneta tre volte. Calcolare la probabilità di osservare *testa* al primo lancio, sapendo che il risultato *testa* è stato osservato almeno una volta.

Soluzione

2. Si lancia una moneta cinque volte. Calcolare la probabilità di osservare *testa* al terzo lancio, sapendo che è stato osservato uno e un solo risultato *testa*.

Soluzione

3. Vengono selezionate tre carte da un mazzo di quaranta carte. Calcolare la probabilità di osservare tre carte di *spade*.

Soluzione

4. Si seleziona una carta da un mazzo di quaranta carte. Dimostrare che gli eventi "esce una carta di *spade*" e "esce un *asso*" sono indipendenti.

Soluzione

5. Una scatola contiene:

- due palline bianche numerate "0";
- otto palline bianche numerate "1";
- quattro palline rosse numerate "0";
- sei palline rosse numerate "1";

Si estrae una pallina casualmente dalla scatola. Verificare che gli eventi "esce una pallina bianca" e "esce una pallina numerata con "0"" non sono indipendenti e spiegare perchè.

Soluzione.

6. Si lancia un dado due volte. Verificare che gli eventi:

A = "risultato pari al primo lancio"

B = “risultato pari al secondo lancio”
C = “la somma dei risultati è pari”
non sono indipendenti e spiegare perchè.
Soluzione.

1.4 Variabili aleatorie

1. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri 5 and 0.25. Calcolare $P(X \geq 2)$.

Soluzione

2. Si lancia una moneta quattro volte. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. $X =$ numero di *teste*.

Soluzione

3. Si lancia un dado n volte. Scrivere la funzione di probabilità della v.a. $X =$ “numero di ”6”.

Soluzione

4. Si lancia una moneta finchè non compare *testa*. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. $X =$ ”numero di lanci necessari”.

Soluzione

5. * Si lancia una moneta tre volte. Sia X la v.a. numero di teste osservate nei primi due lanci. Costruire $\sigma(X)$.

Soluzione

6. * Calcolare $P(X \geq 1)$ per una v.a. X con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione

7. Un gioco consiste nel generare un numero casuale Z nell'intervallo $[0, 1]$. Il premio del gioco X è uguale a $2Z$ se $Z > 0.8$ e -1 se $Z \leq 0.8$. Calcolare $P(Z = -1)$ e $P(Z > 1.8)$.

Soluzione

8. Un gioco consiste nel lanciare una moneta e nel generare un numero aleatorio X nell'intervallo $[0, 1]$ indipendentemente dall'esito della moneta. La vincita W è X se esce *testa* e $-X$ se esce *croce*. Calcolare $P(0.5 < W < 0.7)$ e $P(|W| < 0.1)$.

Soluzione

1.5 Vettori aleatori

1. Una moneta viene lanciata tre volte. Sia X il numero di "teste" nei primi due lanci e sia Y il numero di "teste" sui tre lanci. Calcolare la distribuzione congiunta di X e Y .

Soluzione

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con distribuzione di probabilità

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = -1, 0, 1, y = -1, 0, 1, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare $P(X = Y)$.

Soluzione

3. Un dado viene lanciato due volte. Sia X la v.a. punteggio minimo e Y la v.a. punteggio massimo. Calcolare la distribuzione congiunta di X e Y .

Soluzione

4. * Si lancia una moneta tre volte. Sia N_k ($k = 1, 2, 3$) il numero di teste nei primi k lanci. Descrivere gli eventi che appartengono a $\sigma(N_1, N_2)$.

Soluzione

5. * Si lancia un dado due volte. Siano X e Y rispettivamente i risultati al primo e al secondo lancio. Sia $S = X + Y$. Mostrare che $\sigma(Y) \neq \sigma(S)$ e che $\sigma(X, Y) = \sigma(X, S)$.

Soluzione

1.6 Distribuzioni condizionali ed indipendenza.

1. Siano X e Y v.a. indipendenti con $P(X = k) = P(Y = k) = 1/2^k$, per $k = 1, 2, \dots$. Calcolare $P(X \neq Y)$.

Soluzione

2. Si lancia una moneta tre volte. Sia N_k ($k = 1, 2, 3$) il numero di teste nei primi k lanci. Trovare la distribuzione condizionale di N_3 dato $N_1 = 1$.

Soluzione

3. Si lancia un dado due volte. Siano X e Y rispettivamente il risultato del primo e del secondo lancio. Sia $S = X + Y$. Determinare la distribuzione condizionale di X dato che $S = 4$.

Soluzione

4. La distribuzione condizionale di Y dato $X = x$, con $x > 0$, ha densità:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy} & y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la probabilità che Y sia maggiore di 2, dato che $X = 3$.

Soluzione

5. * La distribuzione condizionale della variabile aleatoria X_i dato che $X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}$ ha densità

$$f_i(x) = \begin{cases} e^{x_{i-1}-x} & x \geq x_{i-1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 2, \dots, n$. La densità di X_1 è

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la densità congiunta di X_1, \dots, X_n .

Soluzione

6. * Si lancia una moneta quattro volte. Siano X e Y rispettivamente il numero di teste nei lanci pari e nei lanci dispari. Mostrare che X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

Soluzione

1.7 Valore atteso

1. Un gioco consiste nel lanciare una moneta due volte. La vincita è 2\$ se esce *testa*, *testa* e -1\$ altrimenti. Il gioco è favorevole?

Soluzione

2. Il tempo atteso di vita di un certo componente elettronico, misurato in ore, è 120. Quando il componente si danneggia, viene immediatamente sostituito. Calcolare il tempo medio di attesa per la terza sostituzione.

Soluzione

3. Una variabile aleatoria ha funzione di probabilità

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 0, 2 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il valore atteso di $Y = e^{X+1}$.

Soluzione

4. La funzione di probabilità congiunta delle variabili aleatorie X_1 , X_2 e X_3 è uguale a

$$p(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{8} & (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), \\ & (2, 2, 1), (2, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $E(X_3 - X_1)^2$.

Soluzione

5. Sia X il numero di lanci di una moneta fino al comparire della quinta testa. Calcolare il valore atteso di X .

Soluzione

6. Un gioco consiste nel lanciare una moneta e nel generare un numero casuale X tra zero e uno. La vincita è $2X$ se compare *testa* e -1 se compare *croce*. Calcolare la vincita attesa.

Soluzione

1.8 Momenti

1. Un gioco consiste nel lanciare un dado due volte. La vincita è
- 5\$ se compare (6,6)
- 4\$ se compaiono due risultati uguali, escluso (6,6)
- 0 altrimenti.

Calcolare la media e la deviazione standard della vincita.

Soluzione

2. Si genera un numero casuale tra 0 e 1. Calcolare la media e la deviazione standard.

Soluzione

3. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la media e la varianza di X .

Soluzione

4. Sia X una variabile aleatoria con funzione di probabilità

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = -2, -1, 1, 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare il momento terzo di X .

Soluzione

5. Si lancia una moneta tre volte. Sia X_2 il numero di teste nei primi due lanci, e X_3 il numero di teste in tre lanci. Calcolare la funzione di regressione di X_3 su X_2 e la funzione di regressione di X_2 su X_3 .

Soluzione

6. Un numero casuale X_1 è scelto nell'intervallo $[0, 1]$; dopo aver osservato X_1 , un numero aleatorio X_2 viene scelto nell'intervallo $[0, X_1]$. Calcolare la funzione di regressione di X_2 su X_1 .

Soluzione

1.9 Distribuzione Normale

1. Sia X una v.a. con distribuzione $N(2.8, 0.25)$. Calcolare la probabilità che X cada nell'intervallo $[2.75, 2.76)$.

Soluzione

2. Si dice che X ha una distribuzione lognormale (μ, σ^2) se $\log X \sim N(\mu, \sigma)$.

Sia X una v.a. con distribuzione lognormale di parametri -3.34 e 9.81 . Determinare la probabilità che X assuma valori più piccoli di 0.05 .

Soluzione

3. Siano X e Y v.a. indipendenti. Supponiamo inoltre che $X \sim N(-2.87, 35.28)$ e $Y \sim N(1.26, 15.22)$. Determinare la probabilità che $X - Y$ assuma valori più piccoli di -3 .

Soluzione

4. Si lancia una moneta 64 volte. Calcolare la probabilità di osservare meno di 30 "teste".

Soluzione

5. Le durate in vita in ore X_1, X_2, \dots, X_{100} di cento componenti elettronici sono v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con valore atteso $\mu = 10^4$ e deviazione standard $\sigma = 10^3$. Calcolare la probabilità che la durata media dei componenti $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_{100})/100$ sia inferiore a 10010 ore.

Soluzione

1.10 Covarianza

1. Una moneta viene lanciata tre volte. Siano N_1, N_2, N_3 il numero di *teste* dopo il primo, il secondo e il terzo lancio, rispettivamente. Calcolare $V(N_1), V(N_2), V(N_3), Cov(N_1, N_2), Cov(N_1, N_3), Cov(N_2, N_3)$.

Soluzione

2. Siano X e Y due v.a. con $V(X) = 2$, $V(Y) = 5$ e $Cov(X, Y) = -1$. Trovare la varianza della v.a. $3X - Y$.

Soluzione

3. Siano X e Y due v.a. con $V(X) = 4$, $V(Y) = 1$ e $Cov(X, Y) = -1.88$. Commentare la correlazione lineare tra X e Y .

Soluzione

4. Siano X_1 , X_2 e X_3 v.a. con $Cov(X_1, X_2) = -1$ e $Cov(X_1, X_3) = 2$. Calcolare la covarianza tra X_1 e $X_2 - 4X_3$.

Soluzione

5. Sia (X_1, X_2, X_3) un vettore aleatorio tale che $V(X_1) = 2$, $V(X_2) = 4$, $V(X_3) = 6$, $Cov(X_1, X_2) = 0$, $Cov(X_1, X_3) = -1$, $Cov(X_2, X_3) = 2$. Calcolare $V(X_1 + X_2)$, $V(X_2 + X_3)$ e $Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$.

Soluzione

1.11 Distribuzione Normale multivariata*

1. Siano X_1 e X_2 v.a. indipendenti con distribuzione $N(2.65, 9.24)$ e $N(-3.99, 9.32)$ rispettivamente. Determinare la distribuzione del vettore aleatorio (Y_1, Y_2) dove $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$.

Soluzione

2. Sia (X_1, X_2) un vettore aleatorio con distribuzione normale di parametri $\underline{\mu} = (6.25, -3.58)$, $\sigma_1^2 = 9.84$, $\sigma_2^2 = 4.65$ e $\sigma_{1,2} = -1.95$. Determinare la distribuzione di probabilità della v.a. $W = X_1 - X_2$.

Soluzione

3. Siano (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) vettori aleatori indipendenti entrambi con distribuzione normale multivariata di parametri $\mu_X = (5.25, 8.48)$, $\mu_Y = (-1.34, -6.29)$, $\sigma_{X_1}^2 = 9.87$, $\sigma_{X_2}^2 = 2.81$, $\sigma_{Y_1}^2 = 1.26$, $\sigma_{Y_2}^2 = 8.66$, $\sigma_{X_1, X_2} = -0.99$, $\sigma_{Y_1, Y_2} = 1.22$. Determinare la distribuzione del vettore aleatorio (W_1, W_2) , con $W_1 = X_1 + X_2 - (Y_1 + Y_2)$ e $W_2 = (X_1 - X_2) + (Y_1 - Y_2)$.

Soluzione

4. Sia (X_1, X_2, X_3, X_4) un vettore con distribuzione normale con parametri $\bar{\mu} = (0.22, 4.35, -0.01, 2.25)$, $\sigma_1^2 = 12.33$, $\sigma_2^2 = 2.84$, $\sigma_3^2 = 4.10$, $\sigma_4^2 = 8.67$, $\sigma_{1,2} = 0.1$, $\sigma_{1,3} = -0.32$, $\sigma_{1,4} = -0.0$, $\sigma_{2,3} = -0.20$, $\sigma_{2,4} = -0.15$, $\sigma_{3,4} = 0.025$. Determinare la distribuzione del vettore aleatorio (W_1, W_2) con $W_1 = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$ e $W_2 = X_1 - X_3$.

Soluzione

Capitolo 2

Soluzioni

2.1 Eventi

1. $\Omega = \{T, CT, CCT, CCCT, CCCCT, \dots\}$,
 $A = \text{"Sono necessari meno di tre lanci"} = \{T, CT\}$.

Torna al testo

2. $\Omega = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$,
 $A = \text{"Testa al terzo lancio"} = \{TTT, TCT, CTT, CCT\}$.

Torna al testo

3. $\Omega = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$

a)

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = TTT, TTC, TCT, TCC \\ 0 & \omega = CTT, CCT, CTC, CCC \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 2 & \omega = TTC, TTT \\ 1 & \omega = TCT, TCC, CTT, CTC \\ 0 & \omega = CCT, CCC \end{cases}$$

$$X_3(\omega) = \begin{cases} 3 & \omega = TTT \\ 2 & \omega = TTC, TCT, CTT \\ 1 & \omega = TCC, CTC, CCT \\ 0 & \omega = CCC \end{cases}$$

b) $(X_1 = X_2) = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\} = \text{croce al secondo lancio} = \{CCC, CCT, TCT, TCC\}$.

Torna al testo

4. $A^c \cap B^c \cap C^c$, (o equivalentemente $(A \cup B \cup C)^c$).

Torna al testo

5. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$.

Torna al testo

2.2 Probabilità

1. $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), \dots, (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$.

$A = \text{"stesso risultato"} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (6, 6)\}$. A contiene sei dei 36 diversi risultati elementari. Ogni evento elementare ha probabilità $\frac{1}{36}$ quindi $P(A) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

Torna al testo

2. $\Omega = \{T, CT, CCT, CCCT, \dots\}$.

$A = \text{"sono necessari } n \text{ tentativi"} = \underbrace{CCCC\dots CT}_n$. Dunque $P(A) = \frac{1}{2^n}$.

Torna al testo

3. $A = \text{"esattamente un sei"}$. Significa: "6" in un lancio, "1" o "2" o "3" o "4" o "5" negli altri lanci. La probabilità che esca 6 in un lancio prefissato e un risultato diverso da "6" negli altri lanci è uguale al numero dei casi favorevoli a tale evento diviso per il numero dei casi possibili, cioè $\frac{5^4}{6^5}$. D'altra parte il 6 può risultare in uno qualsiasi dei cinque lanci, quindi $P(A) = 5 \left(\frac{5^4}{6^5}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

Torna al testo

4. $\Omega = \{TTT, TCC, CTC, CCT, CTT, TCT, TTC, CCC\}$

$A = \text{"almeno una testa"}$, significa: una o due o tre teste.

D'altra parte $A^c = \{TTT\}$, $P(A^c) = \frac{1}{8}$.

Quindi $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Torna al testo

2.3 Probabilità condizionale ed indipendenza

1. Al solito definiamo prima Ω .

$\Omega = \{TTT, TTC, CTT, TCT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$.

$A = \text{"testa al primo lancio"} = \{TTT, TTC, TCT, TCC\}$.

$B = \text{"testa almeno una volta"} = \{CCC\}^c = \{TTT, TTC, CTT, TCT, TCC, CTC, CCT\}$.

Per definizione di probabilità condizionale, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, per $P(B) > 0$. In questo caso $A \cap B = A$, perchè $A \subset B$, quindi $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$. Poiché $P(A) = 4/8$ e $P(B) = 7/8$, si ottiene $P(A|B) = \frac{4}{7}$.

Torna al testo

2. $A =$ "Si osserva *testa* al terzo lancio".
 $B =$ "Si osserva *testa* esattamente una volta".
 $A \cap B =$ "Si osserva *testa* soltanto al terzo lancio" = {CCTCC}.
- $\Omega = \{\omega = \omega_1, \dots, \omega_5 : \omega_i = C \text{ oppure } T\}$ contiene $2^5 = 32$ eventi elementari.
 Quindi $P(B) = \frac{5}{32}$ infatti $B = \{TCCCC, CTCCC, CCTCC, CCCTC, CCCCT\}$.
 $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{32} \frac{32}{5} = \frac{1}{5}$.
 Torna al testo
3. Il mazzo è composto dalle carte seguenti: 10 spade, 10 bastoni, 10 denari e 10 coppe.
 Indichiamo con $S_1 =$ "la prima carta è di spade."
 $S_2 =$ "la seconda carta è di spade."
 $S_3 =$ "la terza carta è di spade."
 Allora $P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1)P(S_2|S_1)P(S_3|S_1 \cap S_2)$.
 Ora $P(S_1) = \frac{10}{40}$, $P(S_2|S_1) = \frac{9}{39}$, $P(S_3|S_1 \cap S_2) = \frac{8}{38}$, quindi $P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = \frac{10}{40} \frac{9}{39} \frac{8}{38}$.
 Torna al testo
4. Per dimostrare che A e B sono indipendenti è sufficiente dimostrare che $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ora $P(A \cap B) = \frac{1}{40}$, $P(A) = \frac{10}{40}$, $P(B) = \frac{4}{40}$, quindi $P(A)P(B) = \frac{1}{4} \frac{1}{10} = \frac{1}{40} = P(A \cap B)$.
 Torna al testo
5. Numero di palline = 20. Definiamo gli eventi seguenti: $A =$ "esce una pallina bianca"
 $B =$ "esce una pallina numerata con 0". Siccome ci sono dieci palline bianche e sei palline numerate con 0, $P(A) = 1/2$ e $P(B) = \frac{6}{20}$. Ora $A \cap B =$ "esce una pallina bianca numerata con 0" ha probabilità $\frac{2}{20}$. Siccome $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, segue che A e B non sono indipendenti.
 A e B non sono indipendenti in quanto la proporzione di palline numerate con 0 è diversa tra le palline bianche e le palline nere.
 Torna al testo
6. $A = \{\text{numero pari al primo lancio}\}$. $P(A) = \frac{1}{2}$.
 $B = \{\text{numero pari al secondo lancio}\}$. $P(B) = \frac{1}{2}$.
 $C = \{\text{la somma dei due lanci è pari}\}$. L'evento C si verifica soltanto se i risultati dei due lanci sono entrambi pari o entrambi dispari. Quindi $P(C) = \frac{1}{2}$. Mentre $P(C|A \cap B) = 1$.
 A , B e C non sono indipendenti in quanto A e B congiuntamente implicano C .
 Torna al testo

2.4 Variabili aleatorie

1. $X \sim Bi(5, 0.25)$
 $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= \binom{5}{0} 0.25^0 (1 - 0.25)^5 \\
P(X = 1) &= \binom{5}{1} 0.25 (0.75)^4 \\
P(X \geq 2) &= 1 - 0.75^5 - 5(0.25)(0.75)^4 = 0.3671.
\end{aligned}$$

2. Chiamiamo "successo" l'evento "esce *testa*". Poichè X conta il numero di successi su 4 prove, X ha distribuzione binomiale con probabilità di successo $p = \frac{1}{2}$. Dunque $X \sim Bi(4, \frac{1}{2})$, ovvero X assume i valori 1, 2, 3, 4 e

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
P(X = 1) &= \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
P(X = 2) &= \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
P(X = 3) &= \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
P(X = 4) &= \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4
\end{aligned}$$

3. Chiamiamo "successo" l'evento "esce 6". Poichè X conta il numero di successi su n prove, X ha distribuzione binomiale. La probabilità di successo è $p = \frac{1}{6}$. Dunque $R_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ e

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} & x=0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

4. Lo spazio degli eventi elementari è $\Omega = \{T, CT, CCT, \dots, CCC \dots\}$.

$$P(X = x) = P(\underbrace{CCC \dots CT}_{x-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ per } x = 1, 2, \dots$$

5. * $R_X = \{0, 1, 2\}$. Siano:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{X = 0\} = \{CCC, CCT\} \\
A_2 &= \{X = 1\} = \{TCC, CTC, TCT, CTT\} \\
A_3 &= \{X = 2\} = \{TTC, TTT\}
\end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \sigma(X) = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_3, A_1 \cup A_2, \Omega\}.$$

6. $P(X \geq 1) = \int_1^\infty e^{-x} dx = [-e^{-1}]_1^\infty = \frac{1}{e}$.

7. $\Omega = [0, 1]$.

$$R_X = \{-1\} \cup (1.6, 2].$$

$$P(X = -1) = P(Z \leq 0.8) = 0.8, \quad P(X > 1.8) = P(Z > 0.9) = 0.1.$$

8. Sia $A =$ "testa". Allora $P(0.5 < W < 0.7) = P(A \cap \{0.5 < X < 0.7\}) =$

$$P(A)P(0.5 < X < 0.7) = \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.1.$$

$$\text{Poichè } |W| = X, \quad P(|W| < 0.1) = P(X < 0.1) = 0.1.$$

2.5 Vettori aleatori

1. Le variabili aleatorie X e Y possono essere descritte dalla seguente tabella

Ω	X	Y
TTT	2	3
TTC	2	2
TCT	1	2
TCC	1	1
CTT	1	2
CTC	1	1
CCT	0	1
CCC	0	0

Quindi il vettore aleatorio (X, Y) ha la seguente distribuzione di probabilità

Y	0	1	2	3
X				
0	1/8	1/8	0	0
1	0	2/8	2/8	0
2	0	0	1/8	1/8

Torna al testo

2. $P(X = Y) = P(X = -1, Y = -1) + P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1)$;
 $P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{8}$
 $P(X = 0, Y = 0) = 0$
 $P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8}$.
 Quindi $P(X = Y) = \frac{1}{4}$.

Torna al testo

3. Indichiamo con ω_1 e ω_2 i risultati del primo e del secondo lancio rispettivamente. Il vettore aleatorio (X, Y) può essere descritto mediante la seguente tabella.

ω_2	1	2	3	4	5	6
ω_1						
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(1, 2)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(5, 6)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Dunque la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y è

Y	1	2	3	4	5	6
X						
1	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36
2	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36
3	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36
4	0	0	0	1/36	2/36	2/36
5	0	0	0	0	1/36	2/36
6	0	0	0	0	0	1/36

Torna al testo

4. * Gli eventi in $\sigma(N_1, N_2)$ sono gli eventi che non dipendono dal risultato al terzo lancio.

Torna al testo

5. * Sia $A_1 = \{Y = 1\} = \{(1, 1), (2, 1), \dots, (6, 1)\}$. Allora $A_1 \in \sigma(Y)$ ma $A_1 \notin \sigma(S)$, poichè A_1 non può essere scritta come $\{S \in B\}$.

Sia $A_2 = \{S = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Allora $A_2 \in \sigma(S)$ ma $A_2 \notin \sigma(Y)$ dato che A_2 non può essere scritta come $\{Y \in B\}$.

Quindi $\sigma(Y) \neq \sigma(S)$ e nessuna relazione di inclusione vale.

D'altra parte, poichè (X, S) è una funzione di (X, Y) , $\sigma(X, S) \subseteq \sigma(X, Y)$; inoltre, poichè (X, Y) è una funzione di (X, S) , $\sigma(X, Y) \subseteq \sigma(X, S)$.

Quindi $\sigma(X, Y) = \sigma(X, S)$.

Torna al testo

2.6 Distribuzioni condizionali ed indipendenza

1.

$$\begin{aligned}
 P(X \neq Y) &= 1 - P(X = Y) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k, Y = k) \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)(Y = k) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \\
 &= 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{3} \simeq 0.667.
 \end{aligned}$$

Torna al testo

2. Sia $Y = N_3 - N_1$ il numero di teste osservate ai lanci due e tre. Notiamo che N_1 e Y sono variabili aleatorie indipendenti. Quindi

$$P(N_3 = 1|N_1 = 1) = P(Y = 0|N_1 = 1) = P(Y = 0) = 1/4$$

$$P(N_3 = 2|N_1 = 1) = P(Y = 1|N_1 = 1) = P(Y = 1) = 1/2$$

$$P(N_3 = 3|N_1 = 1) = P(Y = 2|N_1 = 1) = P(Y = 2) = 1/4.$$

La distribuzione condizionale di N_3 dato che $N_1 = 1$ è quindi

x	$P(N_3 = x N_1 = 1)$
1	1/4
2	1/2
3	1/4

Torna al testo

3. Osserviamo che

$$P(X = 1|S = 4) = \frac{P(X = 1, S = 4)}{P(S = 4)} = \frac{P(X = 1, Y = 3)}{P(S = 4)} = \frac{1/36}{3/36} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2|S = 4) = \frac{P(X = 2, S = 4)}{P(S = 4)} = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(S = 4)} = \frac{1/36}{3/36} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 3|S = 4) = \frac{P(X = 3, S = 4)}{P(S = 4)} = \frac{P(X = 3, Y = 1)}{P(S = 4)} = \frac{1/36}{3/36} = \frac{1}{3}$$

Quindi

$$P(X = x|S = 4) \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Torna al testo

- 4.

$$P(Y \geq 2|X = 3) = \int_2^\infty 3e^{-3y} dy = [-e^{-3y}]_2^\infty = e^{-6}$$

Torna al testo

5. * In base alla definizione di funzione di densità di probabilità condizionale

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)f_{X_3|X_1, X_2}(x_3|x_1, x_2) \cdots f_{X_n|X_1, \dots, X_{n-1}}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$$

Quindi

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} e^{-x_1}(e^{x_1-x_2})e^{x_2-x_3}e^{x_3-x_4} \dots e^{x_{n-1}-x_n} = e^{-x_n} & x_n \geq x_{n-1} \geq x_{n-2} \geq \dots \geq x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Torna al testo

6. * Sia A_i l'evento "testa al lancio i -esimo". Allora A_1, \dots, A_4 sono eventi indipendenti. Quindi $1_{A_1}, \dots, 1_{A_4}$ sono v.a. indipendenti. Inoltre $X = 1_{A_1} + 1_{A_3}$ e $Y = 1_{A_2} + 1_{A_4}$. Quindi, come funzioni di vettori aleatori indipendenti, X e Y sono v.a. indipendenti.
- Torna al testo

2.7 Valore atteso

1. $\Omega = \{TT, CT, TC, CC\}$

$$W(\omega) = \begin{cases} +2\$ & \omega \in \{TT\} \\ -1\$ & \omega \in \{TC, CT, CC\} \end{cases} \quad P(W = w) = \begin{cases} \frac{1}{4} & w = 2 \\ \frac{3}{4} & w = -1 \end{cases}$$

$$E(W) = 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Il valore atteso è negativo quindi il gioco è sfavorevole.

Torna al testo

2. Sia X_1 la durata in vita di un componente elettronico messo in uso al tempo zero. Sia X_2 la durata in vita di un componente elettronico messo in uso dopo la prima sostituzione. Sia X_3 la durata in vita di un componente elettronico messo in uso dopo la seconda sostituzione. Il tempo di attesa per la terza sostituzione X è uguale a $X_1 + X_2 + X_3$. Poichè $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 120$, $E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 360$
- Torna al testo

3. X è una v.a. discreta. Quindi

$$E(e^{X+1}) = \sum_{x=0,1,2} e^{x+1}P(X = x) = e\frac{1}{4} + e^2\frac{1}{2} + e^3\frac{1}{4} = \frac{e + 2e^2 + e^3}{4} \simeq 9.4.$$

Torna al testo

4. (X_1, X_2, X_3) è un vettore aleatorio discreto. Quindi

$$E(X_3 - X_1)^2 = \sum_{x_1, x_2, x_3} (x_3 - x_1)^2 P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3)$$

$$= (1-0)^2 \frac{1}{8} + (0-0)^2 \frac{1}{8} + (1-0)^2 \frac{1}{8} + (1-2)^2 \frac{1}{8} + (3-2)^2 \frac{1}{8} + (1-3)^2 \frac{1}{8} + (2-3)^2 \frac{1}{8} + (3-3)^2 \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

Torna al testo

5. $X = X_1 + X_2 + \dots + X_5$, dove X_i = numero di lanci dopo la $(i - 1)$ -esima "testa" e fino alla i -esima "testa". Poichè $P(X_i = x) = (\frac{1}{2})^x$, $E(X_i) = \sum_{x=1}^{\infty} x(\frac{1}{2})^x = 2$. Quindi $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_5) = 5 \cdot 2 = 10$.

Torna al testo

6. Sia A l'evento: "compare testa" e sia W la vincita. Sia 1_A la v.a. che vale 1 se esce testa, e 0 se esce croce. Sia inoltre $1_{\bar{A}}$ la v.a che vale 1 se esce croce e 0 se esce testa. Allora $W = 2X1_A - 1_{\bar{A}}$. Poichè X e 1_A sono v.a. indipendenti,

$$E(W) = E(2X1_A - 1_{\bar{A}}) = E(2X1_A) - E(1_{\bar{A}}) = 2E(X) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Torna al testo

2.8 Momenti

1. Denotiamo con W la vincita del gioco. Allora

$$P(W = w) = \begin{cases} \frac{30}{36} & w = 0 \\ \frac{5}{36} & w = 4 \\ \frac{1}{36} & w = 5 \end{cases}$$

$$EW = 0\left(\frac{30}{36}\right) + 4\left(\frac{5}{36}\right) + 5\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{25}{36} \simeq 0.69.$$

$$EW^2 = 16\left(\frac{5}{36}\right) + 25\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{105}{36}.$$

$$\sigma_w^2 = EW^2 - (EW)^2 = \frac{105}{36} - \left(\frac{25}{36}\right)^2 = \frac{3155}{1296}.$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{3155}}{36} \simeq 1.56$$

Torna al testo

2. Sia X il numero casuale in $[0, 1]$. La funzione di densità di X è

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quindi $EX = \int_0^1 x dx = [\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2} = 0.5$

$EX^2 = \int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.

$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12}$. Quindi la deviazione standard di X è $\sigma_X = \sqrt{1/12} \simeq 0.289$

Torna al testo

3. $EX = \int_0^1 x(2x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2[\frac{x^3}{3}]_0^1 = 2(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \simeq 0.667$.

$EX^2 = \int_0^1 x^2 2x dx = \int_0^1 2x^3 dx = 2[\frac{x^4}{4}]_0^1 = 2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$.

$Var(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \simeq 0.0556$.

Torna al testo

4. X è una v.a. discreta quindi $EX^3 = \sum_x x^3 p(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = -2, -1, 1, 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Quindi $EX^3 = -8(\frac{1}{4}) - 1(\frac{1}{4}) + 1(\frac{1}{4}) + 8(\frac{1}{4}) = 0$.

Torna al testo

5. Il numero di teste in tre lanci è X_2 con probabilità $1/2$ e $X_2 + 1$ con probabilità $1/2$.

Quindi $P(X_3 = x | X_2 = x) = P(X_3 = x + 1 | X_2 = x) = 1/2$. Segue che la funzione di regressione di X_3 su X_2 è $E(X_3 | X_2 = x) = 1/2 x + 1/2 (x + 1) = x + 1/2$.

Determiniamo ora la funzione di regressione di X_2 su X_3 . Osserviamo che se $X_3 = 0$, allora $X_2 = 0$, mentre se $X_3 = 3$, allora $X_2 = 2$. Inoltre

$$P(X_2 = 2 | X_3 = 2) = \frac{P(X_2 = 2, X_3 = 2)}{P(X_3 = 2)} = 1/3$$

$$P(X_2 = 1 | X_3 = 2) = \frac{P(X_2 = 1, X_3 = 2)}{P(X_3 = 2)} = 2/3$$

$$P(X_2 = 1 | X_3 = 1) = \frac{P(X_2 = 1, X_3 = 1)}{P(X_3 = 1)} = 2/3$$

$$P(X_2 = 0 | X_3 = 1) = \frac{P(X_2 = 0, X_3 = 1)}{P(X_3 = 1)} = 1/3.$$

Quindi $E(X_2 | X_3 = 0) = 0$, $E(X_2 | X_3 = 1) = 2/3$, $E(X_2 | X_3 = 2) = 4/3$, $E(X_2 | X_3 = 3) = 2$. La funzione di regressione di X_2 su X_3 è dunque $E(X_2 | X_3 = x) = 2/3 x$. Tale risultato indica che in media $2/3$ del numero totale di teste sono osservate nei primi due lanci.

Torna al testo

6. Subordinatamente a $X_1 = x$, X_2 è un numero aleatorio tra zero e x . Quindi

$E(X_2 | X_1 = x) = x/2$.

Torna al testo

2.9 Distribuzione Normale

1. X è una v.a. con distribuzione normale, $\mu = 2.8$ e $\sigma^2 = 0.25$.
 Quindi $P(2.75 < X < 2.76) = P(\frac{2.75-2.8}{0.5} < Z < \frac{2.76-2.8}{0.5}) = P(-0.1 < Z < -0.08)$,
 dove $Z = (X - \mu)/\sigma = (X - 2.8)/0.5$ è una v.a. con distribuzione normale standardizzata. Poichè la distribuzione normale standardizzata è simmetrica $P(-0.1 < Z < -0.08) = P(0.08 < Z < 0.1) = \phi(0.1) - \phi(0.08)$, dove ϕ è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata. I valori di $\phi(0.1)$ e $\phi(0.08)$ possono essere ricavati dalle tavole statistiche. Essi sono 0.5398 e 0.5319. Quindi $P(2.75 < X < 2.76) = 0.5398 - 0.5319 = 0.0079$
 Torna al testo
2. Poichè $X \sim \log N(-3.34, 9.81)$, $\log X \sim N(-3.34, 9.81)$. Quindi, se Φ indica la funzione di ripartizione normale standardizzata

$$\begin{aligned} P(X < 0.05) &= P(\log X < \log 0.05) = P(\log X < -2.995) \\ &= P\left(\frac{\log X + 3.34}{\sqrt{9.81}} < \frac{-2.995 + 3.34}{\sqrt{9.81}}\right) = P\left(\frac{\log X + 3.34}{\sqrt{9.81}} < \frac{0.345}{3.13}\right) \\ &= P\left(\frac{\log X + 3.34}{\sqrt{9.81}} < 0.11\right) = \Phi(0.11) = 0.5438 \end{aligned}$$

Torna al testo

3. Poichè X e Y sono v.a. indipendenti, con distribuzione normale, $X - Y$ ha distribuzione normale con parametri $\mu = -2.87 - 1.26 = -4.13$ e $\sigma^2 = 35.28 + 15.22 = 50.5$. Quindi, se Φ denota la funzione di ripartizione della normale standardizzata, $P(X - Y < -3) = P(\frac{X-Y-\mu}{\sigma} < \frac{-3-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{-3+4.13}{7.106}) = \Phi(0.159) = 0.5636$.
 Torna al testo
4. Sia X_i l'indicatore dell'evento "testa al primo lancio" i " ($i = 1, \dots, 64$). Allora il numero di "teste" è $X = \sum_{i=1}^{64} X_i$. Si noti che X_1, \dots, X_{64} sono v.a. indipendenti ed identicamente distribuite di media $\mu = 1/2$ e deviazione standard $\sigma = 1/2$. Quindi, per il teorema centrale del limite,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{56} X_i < 30\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64 \cdot 1/2}{\sqrt{64} \cdot 1/2} < \frac{30 - 64 \cdot 1/2}{\sqrt{64} \cdot 1/2}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{30 - 64 \cdot 1/2}{\sqrt{64} \cdot 1/2}\right) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085. \end{aligned}$$

Torna al testo

5. Poichè X_1, \dots, X_{100} sono v.a. indipendenti ed identicamente distribuite, per il teorema centrale del limite,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} < 10010\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 10010 \cdot 100\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 10^4 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 10^3}} < \frac{10010 \cdot 100 - 10000 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 10^3}}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{10010 \cdot 100 - 10000 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 10^3}}\right) = \Phi\left(\frac{1000}{10000}\right) = \Phi(0.1) = 0.5398. \end{aligned}$$

Torna al testo

2.10 Covarianza

1. Sia X_i il numero di "teste" al lancio i ($i = 1, 2, 3$). Allora X_1, X_2, X_3 sono v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione di probabilità

x	<i>probab.</i>
0	1/2
1	1/2

Inoltre $N_1 = X_1$, $N_2 = X_1 + X_2 = N_1 + X_2$ e $N_3 = X_1 + X_2 + X_3 = N_1 + X_2 + X_3 = N_2 + X_3$. Quindi $E(N_1) = E(X_1) = 1/2$, $E(N_2) = E(X_1) + E(X_2) = 1/2 + 1/2 = 1$ e $E(N_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$.

Inoltre, poichè $V(X_i) = 1/4$, $V(N_1) = V(X_1) = 1/4$, $V(N_2) = V(X_1) + V(X_2) = 1/2$, $V(N_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3/4$. Per calcolare le covarianze, basta notare che N_i e X_j sono v.a. indipendenti, quando $j > i$. Quindi

$$Cov(N_1, N_2) = Cov(N_1, N_1 + X_2) = Cov(N_1, N_1) = V(N_1) = 1/4$$

$$Cov(N_1, N_3) = Cov(N_1, N_1 + X_2 + X_3) = Cov(N_1, N_1) = V(N_1) = 1/4$$

$$Cov(N_2, N_3) = Cov(N_2, N_2 + X_3) = Cov(N_2, N_2) = V(N_2) = 1/2.$$

Torna al testo

2. Ricordiamo che $Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$. Quindi $Var(3X - Y) = 9Var(X) + Var(Y) - 6Cov(X, Y) = 9(2) + 5 - 6(-1) = 18 + 5 + 6 = 29$
Torna al testo

3. Calcoliamo il coefficiente di correlazione lineare $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$.

In questo caso $\rho(X, Y) = \frac{-1.88}{\sqrt{4}} = \frac{-1.88}{2} = 0.99$. Poichè ρ è prossimo a -1 , c'è una forte correlazione lineare negativa tra X e Y .

Torna al testo

4. $Cov(X_1, X_2 - 4X_3) = Cov(X_1, X_2) - 4Cov(X_1, X_3) = -1 - 4(2) = -9$.

Torna al testo

5. $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) = 2 + 4 = 6$

$$V(X_2 + X_3) = V(X_2) + V(X_3) + 2Cov(X_2, X_3) = 4 + 6 + 2(2) = 14$$

$$Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) + V(X_2) + Cov(X_2, X_3) = -1 + 4 + 2 = 5$$

Torna al testo

2.11 Distribuzione Normale multivariata*

1. Il vettore aleatorio (X_1, X_2) ha distribuzione normale multivariata con vettore delle medie e matrice di varianze e covarianze

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 2.65 \\ -3.99 \end{pmatrix} \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} 9.24 & 0 \\ 0 & 9.32 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Quindi (Y_1, Y_2) è un vettore aleatorio con distribuzione normale multivariata e vettore delle medie

$$\mu_Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.65 \\ -3.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.34 \\ 6.64 \end{pmatrix}$$

e matrice di varianze e covarianze

$$\Sigma_Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9.24 & 0 \\ 0 & 9.32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.56 & -0.08 \\ -0.08 & 18.56 \end{pmatrix}$$

Torna al testo

2. La v.a. W ha distribuzione normale con parametri $\mu_W = E(W) = E(X_1) - E(X_2) = 6.25 + 3.58 = 9.83$ e $\sigma_W^2 = V(W) = V(X_1) + V(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 9.84 + 4.65 - 2 \cdot (-1.95) = 18.39$.

Torna al testo

3. Il vettore aleatorio (X_1, X_2, Y_1, Y_2) ha distribuzione normale multivariata con vettore delle medie

$$\mu = \begin{pmatrix} 5.25 \\ 8.48 \\ -1.34 \\ -6.29 \end{pmatrix}$$

e matrice di varianze e covarianze

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9.87 & -0.99 & 0 & 0 \\ -0.99 & 2.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.26 & 1.22 \\ 0 & 0 & 1.22 & 8.66 \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

il vettore aleatorio W ha distribuzione normale con vettore delle medie

$$\mu_W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.25 \\ 8.48 \\ -1.34 \\ -6.29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.36 \\ 1.72 \end{pmatrix}$$

e matrice di varianza e covarianza

$$\begin{aligned} \Sigma_W &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9.87 & -0.99 & 0 & 0 \\ -0.99 & 2.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.26 & 1.22 \\ 0 & 0 & 1.22 & 8.66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8.88 & 1.82 & -2.48 & -9.88 \\ 10.86 & -3.8 & 0.04 & -7.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.06 & 14.46 \\ 14.46 & 22.14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Torna al testo

4. Il vettore aleatorio (X_1, X_2, X_3, X_4) ha distribuzione normale multivariata con vettore delle medie

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 4.35 \\ -0.01 \\ 2.25 \end{pmatrix}$$

e matrice di varianza e covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 12.33 & 0.1 & -0.32 & -0.01 \\ 0.1 & 2.84 & -0.2 & -0.15 \\ -0.32 & -0.2 & 4.10 & 0.25 \\ -0.01 & -0.15 & 0.25 & 8.67 \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

il vettore aleatorio W ha distribuzione normale multivariata con vettore delle medie

$$\mu_W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.22 \\ 4.35 \\ -0.01 \\ 2.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.81 \\ 0.23 \end{pmatrix}$$

e matrice di varianza e covarianza

$$\begin{aligned} \Sigma_W &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.33 & 0.1 & -0.32 & -0.01 \\ 0.1 & 2.84 & -0.2 & -0.15 \\ -0.32 & -0.2 & 4.10 & 0.25 \\ -0.01 & -0.15 & 0.25 & 8.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12.1 & 2.59 & 3.83 & 8.76 \\ 12.65 & 0.3 & -4.42 & -0.26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.28 & 8.27 \\ 8.27 & 17.07 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Torna al testo